Disciplina – MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

A) (8 PONTOS)

Para depositar, ao acaso, os 5 tubos idênticos coletores de sangue no recipiente, devemos escolher 5 compartimentos dentre os 13 existentes. O número de maneiras de se fazer essa escolha é dado pela combinação de 13 compartimentos tomados 5 a 5, ou seja:

$$C_{13,5} = \frac{13!}{5!.(13-5)!}.$$

Simplificando a expressão, obtém-se

$$\frac{13!}{5!.8!} = \frac{13.12.11.10.9.8!}{5.4.3.2.1.8!} = 1287 .$$

Portanto, há 1287 formas de se depositar, ao acaso, 5 tubos coletores de sangue no recipiente.

B) (12 PONTOS)

A probabilidade é dada pelo quociente do número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis”.

O número “casos possíveis” é dado pelo número de maneiras de se depositar, ao acaso, 5 tubos coletores de sangue no recipiente. Esse número foi calculado no item anterior, assim o número de casos possíveis é igual a 1287.

Para que os tubos coletores não tenham compartimentos vazios entre eles, é necessário que eles fiquem um ao lado do outro. Logo, consideramos a sequência de um tubo ao lado do outro como um único objeto. Esse único objeto ocupará 5 compartimentos do recipiente, assim, ao se colocar esse único objeto no recipiente, sobrarão 8 compartimentos vazios. Agora devemos permutar esses 9 objetos.

Assim, o número de “casos favoráveis” será dado pela permutação (com repetição) de 9 objetos, sendo 8 iguais aos recipientes vazios e 1 sendo o objeto único formado pelos 5 tubos um do lado do outro.

Dessa forma, o número de “casos favoráveis” é igual a

$$P_9^{8,1} = \frac{9!}{8!.1!} = 9.$$

Portanto, a probabilidade de que 5 desses tubos coletores de sangue depositados no recipiente não tenham compartilhamentos vazios entre eles é igual a

$$P = \frac{9}{1287} = \frac{1}{143}.$$

QUESTÃO 2

A) (10 PONTOS)

A reta $l: x + y = 4$ tem coeficiente angular $m_l = -1$. Se s é uma reta perpendicular à reta l, então o coeficiente angular de s é $m_s = 1$, pois $m_l.m_s = -1$.

O centro da circunferência $\lambda : (x-7)^2 + (y-1)^2 = 1$ é o ponto $C = (7,1)$.

Assim, se s é a reta que passa pelo centro de λ e é perpendicular à l, então s tem a seguinte equação: $y - 1 = 1.(x-7)$.

Logo, $s: x - y = 6$.

Agora, a interseção das retas l e s será dada pelo ponto $P = (x, y)$, em que x e y satisfaçam as equações das duas retas, ou seja, em que x e y satisfaçam o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}.$$

Logo, temos que $P = (5, -1)$.

Portanto, a interseção da reta perpendicular à reta l, passando pelo centro de λ com a reta l é $P = (5, -1)$.

B) (10 PONTOS)

Sabendo-se que a reflexão preserva distâncias, o raio da circunferência λ' é igual ao raio da circunferência λ, ou seja, é igual a 1.

Assim, para encontrar a equação de λ', é preciso determinar o centro de λ'. Para isso, determinamos a reflexão do centro $C = (7,1)$ de λ em torno da reta l.

Pela definição de reflexão dada no enunciado, se $C' = (a,b)$ é o centro de λ', então l é a mediatriz do segmento $\overline{CC'}$. Pelo item anterior, a interseção de l com o segmento $\overline{CC'}$ é o ponto $P = (5,-1)$. Ou seja, $P = (5,-1)$ é o ponto médio do segmento $\overline{CC'}$.

Então, as coordenadas a e b de C' devem satisfazer

$$\frac{a+7}{2} = 5 \text{ e } \frac{b+1}{2} = -1.$$

Logo, $C' = (3,-3)$.

Portanto, $\lambda': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 1$.

QUESTÃO 3

A) (10 PONTOS)

O tanque está inicialmente com 100.000 litros da mistura E15. Logo, há no tanque 15.000 litros de etanol e 85.000 litros de gasolina.

Para que o tanque passe a ter a mistura E20, devemos adicionar x litros de etanol de modo que a quantidade de etanol passe a ser 20% do total da mistura, ou seja,

$$0{,}20.(100000 + x) = 15000 + x.$$

Assim,

$$20000 + 0{,}20.x = 15000 + x \Rightarrow 0{,}80.x = 5000 \Rightarrow x = \frac{5000}{0{,}8} = 6250 \quad .$$

Portanto, a quantidade de litros de etanol que será adicionada ao tanque é de 6250 litros.

B) (10 PONTOS)

O volume de um cilindro circular reto com raio r e altura h é dado por $V = \pi.r^2.h$.

Foi adicionado um volume de 6250 litros de etanol no tanque, ou equivalentemente, $6{,}250 m^3$.

Como o tanque tem a forma de um cilindro circular reto, com raio (da base) medindo 2 metros, se h representa o aumento, em metros, no nível de combustível no tanque, então $6{,}250 = \pi.2^2.h$.

Conforme o enunciado, usando $\pi = 3{,}125$, segue que $h = \dfrac{6{,}25}{4.3{,}125} = 0{,}5m$.

Portanto, o aumento no nível de combustível no tanque foi de 0,5 metro.

QUESTÃO 4

A) (12 PONTOS)

A temperatura do corpo, em graus Celsius, varia com o tempo t, em minutos, de acordo com a função $T(t) = -10 + a.5^{b.t}$, em que a e b são constantes reais. Sabemos que $T(80) = 0$ e que $T(160) = -8$, já que após 80 minutos a temperatura do corpo era de $0^o C$ e após 2 horas e quarenta minutos, ou seja, 160 minutos, a temperatura do corpo era de $-8^o C$.

Assim,

$$\begin{cases} -10 + a.5^{80.b} = 0 \\ -10 + a.5^{160.b} = -8 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema, obtemos

$$a.5^{80.b} = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{5^{80.b}}.$$

Daí, substituindo $a = \dfrac{10}{5^{80.b}}$ na segunda equação do sistema,

$$\frac{10}{5^{80.b}}.5^{160.b} = 2 \Rightarrow 10.5^{160b-80b} = 2 \Rightarrow 5^{80.b} = 5^{-1} \Rightarrow 80.b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{80}.$$

Logo, $a = \dfrac{10}{5^{80.\frac{-1}{80}}} \Rightarrow a = \dfrac{10}{5^{-1}} \Rightarrow a = 50$.

Portanto, $a = 50$ e $b = -\dfrac{1}{80}$.

B) (8 PONTOS)

Note que

$$T(t) \le -9{,}6 \Rightarrow -10 + 50.5^{\frac{-1}{80}.t} \le -9{,}6 \Rightarrow 50.5^{\frac{-1}{80}.t} \le 0{,}4 \Rightarrow 5^{\frac{-1}{80}.t} \le \frac{1}{125} \Rightarrow 5^{\frac{-1}{80}.t} \le 5^{-3}.$$

Logo, $-\frac{1}{80}.t \leq -3 \Rightarrow \frac{1}{80}.t \geq 3 \Rightarrow t \geq 240$ minutos.

Portanto, o instante de tempo a partir do qual $T(t) \leq -9{,}6^{o}C$ é $t = 4$ horas.