# Universidade Federal de Uberlândia
# Faculdade de Matemática

**Processo Seletivo Editais PROGEP 04/2024 e 06/2024**
**Espelho de Correção da Prova Escrita**

## Tema sorteado: O Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes

### Espelho de Correção relativo ao Edital PROGEP nº 4/2024, bem como ao edital complementar PROGEP 06/2024

Para melhor tratarmos do tema sorteado, começamos com alguns conceitos iniciais:

**Experimento Aleatório**
Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, embora seja repetido toda vez da mesma maneira, é chamado de *experimento aleatório*.

**Espaço Amostral**
O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é conhecido como *espaço amostral* do experimento. O espaço amostral é denotado por $S$.

**Evento**
Evento é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

**Probabilidade**
Probabilidade é o estudo das chances de obtenção de cada resultado de um experimento aleatório. A essas chances são atribuídos os números reais do intervalo de 0 a 1. Resultados mais próximos de 1 têm mais chances de ocorrer. Além disso, a probabilidade também pode ser apresentada na forma percentual.

De fato, acima uma probabilidade deve variar de 0 a 1, pois considerando que cada resultado é elemento de algum evento $E$, sempre a quantidade de elementos de um evento ($n(E)$) é menor ou igual à quantidade de elementos do espaço amostral $S$ associado ($n(S)$). E a probabilidade é obtida pela divisão

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

**Exemplo**
Um exemplo de espaço amostral é o seguinte: considerando duas moedas, sendo $C$ para cara e $K$ para coroa, o espaço amostral dos lançamentos, das duas moedas ao mesmo tempo, é $S = \{CC, CK, KC, KK\}$. Cada lançamento das duas moedas, é um experimento aleatório. Se considerarmos o conjunto $\{(K,K),(C,C)\}$, que é subconjunto de $S$, temos um evento que, neste caso, considera apenas as situações onde as duas moedas exibem a mesma face em um lançamento de ambas. A probabilidade de duas faces iguais ocorrer é de $2/4$, ou seja, $1/2$.

**Eventos Independentes**
Dizemos que dois eventos são *independentes* quando a ocorrência de um não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Em outras palavras, se $A$ e $B$ são dois eventos, então $A$ e $B$ são independentes se a informação da ocorrência ou não de $B$ não altera a probabilidade da ocorrência de $A$ e vice-versa. Em símbolos, pode ser afirmado que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Exemplo**
Considerando o lançamento de um dado, os eventos "obter um número par" e "obter um número ímpar" são independentes, porque a ocorrência de um não altera a probabilidade do outro. A probabilidade de obter um número par é de 1/2 e a probabilidade de ocorrer um número ímpar também é de 1/2, independentemente do resultado do lançamento feito antes.

Axiomas de Probabilidade

1. $P(S) = 1$ em que $S$ é o espaço amostral;
2. $0 \leq P(E) \leq 1$ para qualquer evento $E$;
3. Para dois eventos $E_1$ e $E_2$, com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, vale que: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Um fato a se destacar no item 3 dos axiomas, é que se tivermos mais de dois conjuntos, ou seja, $E_1, \ldots, E_n$, com $E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n = \emptyset$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

A partir dos axiomas expressos, é possível demonstrar algumas propriedades.

## Propriedades

Dados dois eventos $A$ e $B$ de um espaço amostral $S$ e, considerando $\overline{A}$ como evento complementar, são válidos:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
4. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

**Demonstração:** Vamos dividir a demonstração segundo seus itens.

- Demonstração de (1): Segue de $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(A) = 1 - P(\overline{A})$, sendo que aqui utilizamos do terceiro axioma acima apresentado.
- Demonstração de (2): Temos $P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$. Novamente utilizamos do terceiro axioma.

- Demonstração de (3): É conhecido da Teoria de Conjuntos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Dividindo toda esta equação por $n(S)$, o resultado segue.

- Demonstração de (4):

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A \cup \overline{A}) \cap B) \\ &= P(A \cup (\overline{A} \cap B)) \\ &= P(A) + P(\overline{A} \cap B) \\ &\geq P(A) + 0 \\ &= P(A). \end{aligned}$$

  Claro que aqui utilizamos de $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$, além do fato que $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$, portanto, do terceiro item dos axiomas. □

**Probabilidade Condicional**
A probabilidade condicional de um evento $B$, dado um evento $A$, denotada como $P(B|A)$, é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

para $P(A) > 0$.

## Regra geral da multiplicação

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos de um espaço amostral. Então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Podemos observar que para dois conjuntos $A_1 = A$ e $A_2 = B$, a regra da multiplicação fica

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

**Exemplo**
Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos $A$ = "soma das faces é par" e $B$ = "soma das faces é maior ou igual a 9". Se sabemos que ocorreu $B$, qual é a probabilidade de ter ocorrido $A$?
A pergunta pode ser reescrita como: Qual o valor de $P(A|B)$? Temos que

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5), \\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6) \end{array} \right\}$$

e

$$B = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Se ocorreu $B$, a única chance de ter ocorrido $A$ é que tenha ocorrido o evento

$$A \cap B = \{(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\}$$

e, nesse caso, a probabilidade é $\frac{4}{10}$ , ou seja,

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Partição**
Uma partição de um espaço amostral $S$ é uma coleção $A_1, \ldots, A_n$ de eventos em $S$ que satisfazem

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, i, j = 1, \ldots, n \text{ e } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S,$$

Para o próximo resultado vamos considerar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição de $S$ e $B$ um evento qualquer. Uma representação é indicada na figura abaixo com $n = 7$:

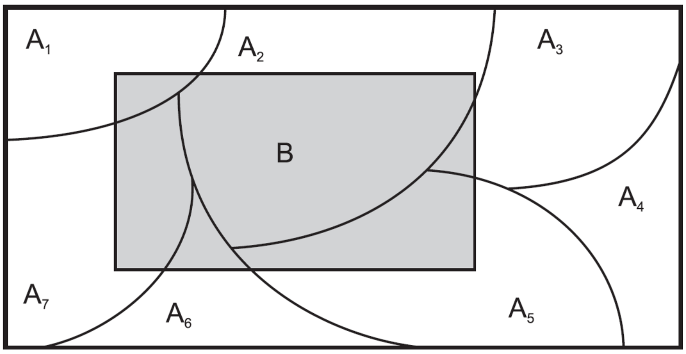


Figura 1: Uma situação de partição de um conjunto, com um evento $B$ qualquer.

Mutuamente excludentes e exaustivos
Alguns autores utilizam o termo *mutuamente excludentes* para o fato das interseções entre os eventos serem vazios e, *exaustivos* pelo fato da união resultar no espaço amostral $S$ como um todo.

## Teorema da Probabilidade Total

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição de um espaço amostral $S$ e seja $B$ um evento qualquer em $S$. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

**Demonstração:** De fato, podemos escrever

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup \ldots A_n) = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Podemos notar que na última união, os termos são, dois a dois, disjuntos. Com isso, podemos utilizar do item 3. dos *Axiomas de Probabilidade*, ou seja,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n).$$

Utilizando da expressão para probabilidade condicional, obtemos:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

□

## Teorema de Bayes

Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição de um espaço amostral $S$ e seja $B$ um evento qualquer em $S$. Então,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

**Demonstração:** Pela expressão da probabilidade condicional, temos:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Agora, pela Regra Geral da Multiplicação, $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$.
Pelo Teorema da Probabilidade Total, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$.
Basta substituir as duas últimas expressões em (1).

**Exemplo**
Um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda $F_1$, 30% de uma fazenda $F_2$ e 50% de uma fazenda $F_3$.

Uma inspeção observou que 20% do leite produzido por $F_1$ estava adulterado, enquanto para $F_1$ e $F_2$ essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Denotemos por $A$ o evento "leite adulterado". Com isso, $P(A|F_1) = 0,2$, $P(A|F_2) = 0,05$ e $P(A|F_3) = 0,02$. O espaço amostral é $S = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, considerando aqui o leite produzido por cada fazenda. A figura, ao final do texto, trás uma representação da situação.
Qual a probabilidade, sabendo que o leite está adulterado, de que tenha sido fornecido pela fazenda $F_1$? Ou seja, qual o valor de $P(F_1|A)$?
Pelo Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(F_1|A) = \frac{P(F_1 \cap A)}{P(A)} &= \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,2 + 0,05 \times 0,3 + 0,02 \times 0,5} \approx 0,615 = 61,5\%. \end{aligned}$$

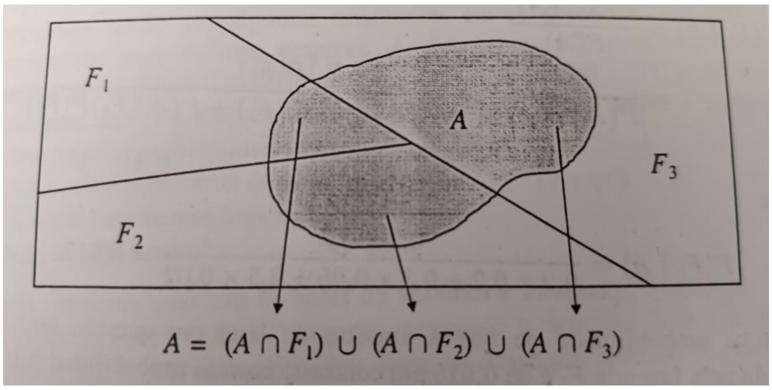


Figura 2: :
Leite adulterado $A$ e fazendas $F_1$, $F_2$ e $F_3$.