Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Processo Seletivo 169/2022 - Prof. Substituto
Espelho de Correção da Prova Escrita

1ª QUESTÃO

(a) **No item (a) espera-se que o(a) candidato(a) enuncie o teste da 1a derivada:**
Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), se c é o único ponto crítico de f em (a,b) então:

- **Se $f'(x) < 0$ para $x < c$ e $f'(x) > 0$ para $x > c$, c é um ponto de mínimo local;**
- **Se $f'(x) > 0$ para $x < c$ e $f'(x) < 0$ para $x > c$, c é um ponto de máximo local;**

Na segunda parte, espera-se que o(a) candidato(a) cite o Teorema Valor Extremo (ou Teorema de Weiertrass): ***Se f é contínua no intervalo compacto $[a,b]$ ela assume valores extremos neste intervalo.***
O(A) candidado(a) deve ainda descrever os passos para se determinar os valores extremos, no caso em que o Teorema acima se aplica:
Para determinar os valores extremos de f em $[a,b]$, calcule os pontos críticos de f em (a,b). Compare os valores de f nos pontos críticos e nas extremidades a e b do intervalo. O maior valor é o máximo e o menor valor é o mínimo.

(b) **No item (b), o(a) candidato(a) deve enunciar o Teorema Fundamentla do Cálculo (T.F.C.):**
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e considere a função $A : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt, a \le x \le b.$$

(1^a parte) **Então A é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e**

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

(2^a parte) **Além disto, se F é uma primitiva de f em $[a,b]$ (ou seja, $F'(x) = f(x)$) então**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Como aplicação do teorema existem várias possibilidades: métodos de integração, cálculo de integrais definidas, áreas, volumes, etc. Espera-se que o candidato apresente pelo menos uma aplicação detalhada, deixando claro como o teorema é utilizado.

(c) **Observe que a função do integrando é contínua em $[0,2]$. Assim, pelo TFC (1^a parte) a função f é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f'(x) = e^{-x^2}\operatorname{sen}\pi x$. Logo, o único ponto crítico de f em $(0,2)$ é $x = 1$. Analisando os valores de f nos pontos críticos e extremidades do intervalo, obtemos $f(0) = 0$, $f(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt$ e $f(2) = \int_0^2 e^{-t^2}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt + \int_1^2 e^{-t^2}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt$. Agora, observe que $e^{-t^2}\operatorname{sen}(\pi t) < 0$ em $(1,2)$ e pelo teorema de preservação do sinal na integral definida, concluímos que $f(1) > f(2)$. Portanto, $x = 1$ é um ponto de máximo absoluto.**

2ª QUESTÃO

(a) Espera-se que o(a) candidato(a) defina os seguintes conceitos:

- **Transformação linear: uma transformação linear** $T\colon U \to V$ **é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:**
  - $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$**, para quaisquer** $u_1, u_2 \in U$**;**
  - $T(\lambda u) = \lambda T(u)$**, para quaisquer** $\lambda \in \mathbb{R}$ **e** $u \in U$**.**
- **Núcleo de uma transformação linear: o núcleo de uma transformação linear** $T\colon U \to V$ **é o conjunto** $\{u \in U\colon T(u) = 0_V\}$**. Notação:** $Nuc(T)$ **ou** $Ker(T)$**.**
- **Imagem de uma transformação linear: a imagem de uma transformação linear** $T\colon U \to V$ **é o conjunto** $\{v \in V\colon \exists\, u \in U \mid T(u) = v\}$**. Notação:** $Im(T)$**.**

Espera-se que o(a) candidato(a) demonstre que $Nuc(T)$ **é um subespaço vetorial de** U **e** $Im(T)$ **é um subespaço vetorial de** V**:**

Sejam $u_1, u_2 \in Nuc(T)$**. Então**

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0_V + 0_V = 0_V,$$

isto é, $u_1 + u_2 \in Nuc(T)$**.**

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ **e** $u \in Nuc(T)$**. Então**

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_V = 0_V,$$

isto é, $\lambda u \in Nuc(T)$**.**

Portanto, $Nuc(T)$ **é um subespaço vetorial de** U**.**

Sejam $v_1, v_2 \in Im(T)$**. Então, existem** $u_1, u_2 \in T$ **tais que** $T(u_1) = v_1$**,** $T(u_2) = v_2$ **e**

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2,$$

isto é, $v_1 + v_2 \in Im(T)$**.**

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ **e** $v \in Im(T)$**. Então existe** $u \in U$ **tal que** $T(u) = v$ **e**

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda v,$$

isto é, $\lambda v \in Im(T)$**.**

Portanto, $Im(T)$ **é um subespaço vetorial de** V**.**

(b) Espera-se que o(a) candidato(a) enuncie e demonstre o Teorema do Núcleo e da Imagem:

Seja $T\colon U \to V$ **uma transformação linear e suponha que** $\dim U < \infty$**. Então**

$$\dim U = \dim Nuc(T) + \dim Im(T).$$

Demonstração: Primeiramente, observe que se $\dim(Nuc(T)) = \dim(U)$ **então** $Im(T) = \{0_V\}$**, isto é,** $\dim(Im(T)) = 0$**. Agora, suponha que** $\dim(Nuc(T)) = n$ **e** $\dim(U) = n + m$ **e seja** $\{u_1, \ldots, u_n\}$ **uma base de** $Nuc(T)$**. Então, existem** $v_1, \ldots, v_m \in U$ **tais que** $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$ **é uma base de** U**. Afirmamos que** $\{Tv_1, \ldots, Tv_m\}$ **é uma base para** $Im(T)$**. De fato, sejam** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ **tais que** $\lambda_1 Tv_1 + \cdots + \lambda_m Tv_m = 0_V$**. Logo,** $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = 0_V$**, isto é,** $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \in Nuc(T)$**, o que só ocorre se** $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$**. Portanto,** $\{Tv_1, \ldots, Tv_m\}$ **é um conjunto linearmente independente. Além disso, se** $w \in Im(T)$ **então existe** $u \in U$ **tal que** $Tu = w$**. Como** $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$ **é base de** U**, existem** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ **tais que** $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$ **e, assim,** $w = Tu = \alpha_1 Tu_1 + \cdots + \alpha_n Tu_n + \lambda_1 Tv_1 + \cdots + \lambda_m Tv_m = \lambda_1 Tv_1 + \cdots + \lambda_m Tv_m$**, pois** $u_1, \ldots, u_n \in Nuc(T)$**. Portanto,** $\{Tv_1, \ldots, Tv_m\}$ **gera** $Im(T)$**, o que conclui a demonstração do teorema.**

(c) Note que $(a, b, c) \in Nuc(T)$ **se, e somente se,** $a = -b$ **e** $c = b$**. Assim,**

$$Nuc(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon a = -b \textbf{ e } c = b\} = \{(-b, b, b) \colon b \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, o conjunto $\{(-1, 1, 1)\}$ **é uma base para** $Nuc(T)$**.**

Por outro lado, veja que $Im(T)$ **é formada por matrizes de** $\mathbb{M}_2$ **da forma**

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$**. Portanto, o conjunto**

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador de $Im(T)$**. Note que** B' **não é linearmente independente e que**

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $Im(T)$**. Em particular,** $\dim Im(T) = 2$**, pois, do Teorema do Núcleo e da Imagem,**

$$3 = \dim U = \dim Nuc(T) + \dim Im(T) = 1 + 2$$

3ª QUESTÃO

(a) Espera-se que o(a) candidato(a) descreva as três condições exigidas:

Os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ representam uma partição do espaço amostral ω quando

- $B_i \cap B_j = \varnothing$ **para todo** $i \neq j$**, ou seja, os eventos** $B_1, B_2, \ldots, B_k$ **são disjuntos;**
- $\bigcup_{i=1}^{k} = \omega$**, ou seja, a união dos eventos** $B_1, B_2, \ldots, B_k$ **gera** ω**;**
- $P(B_i) > 0$ **para todo** B_i**.**

Em termos gerais, podemos dizer que ao realizar um experimento associado a ω, é obrigatório que um e somente um dos eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ocorra.

(b) Espera-se que o(a) candidato(a) defina Probabilidade Condicional em termos dos eventos apresentados e, em seguida, apresente a demonstração do Teorema de Bayes.

Definição de Probabilidade Condicional: Sejam B_i e A eventos do espaço amostral ω. A probabilidade condicional do evento B_i dado que o evento A ocorreu, é dada por

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

desde que $P(A) > 0$.

Demonstração do Teorema de Bayes: Com base na definição de Probabilidade Condicional, a intersecção dos eventos B_i e A pode ser descrita como

$$P(B_i \cap A) = P(B_i|A)P(A)$$

Logo

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

Mas $P(B_i \cap A) = P(A \cap B_i)$, portanto

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

sendo $B_1, B_2, \ldots, B_k$ uma partição do espaço amostral e pelo Teorema da Probabilidade Total

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)$$

e substituindo $P(A)$ na expressão anterior

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

(c) Espera-se que o(a) candidato(a) calcule a probabilidade de retirada de uma bola vermelha utilizando o Teorema da Probabilidade Total e, em seguida, calcule a probabilidade da urna A ser sorteada, dado que foi retirada bola vermelha, utilizando o Teorema de Bayes.

Seja B_i = {urna sorteada é i $(i = a, b, c)$} e V = {bola sorteada é vermelha}. Dessa forma $P(B_i) = \frac{1}{3}$. Alem disso

$$P(V|B_a) = 4/6$$

$$P(V|B_b) = 4/12$$
$$P(V|B_c) = 2/3$$

Os eventos B_i formam uma partição do espaço amostral, pois é obrigatório que um e somente um desses eventos ocorra.

A probabilidade de uma bola retirada ser vermelha depende da urna sorteada. Assim

$$\begin{aligned} P(V) =& P(V|B_a)P(B_a) + P(V|B_b)P(B_b) + P(V|B_c)P(B_c) \\ =& \frac{4}{6}\frac{1}{3} + \frac{4}{12}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} \\ =& \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Probabilidade da urna escolhida ser A dado que a bola retirada é de cor vermelha

$$P(B_a|V) = \frac{P(V|B_a)P(B_a)}{P(V|B_a)P(B_a) + P(V|B_b)P(B_b) + P(V|B_c)P(B_c)}$$

o denominador equivale a $P(V)$, portanto

$$P(B_a|V) = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}.$$